Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 71

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

13 de marzo de 2022

1. Calcular las conexiones de la métrica $\mathrm{d}s^2 = e^{2X}\left(\mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}X^2\right)$.

Vamos a demostrarlo de tres formas distintas, para empezar usemos el método que usa Javier en el vídeo y que explica en su curso de Relatividad General.

$$\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T = e^{2X} \Longrightarrow 0 = \partial_T(\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T) = 2\partial_T\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T = 2(\Gamma^T_{TT}\vec{e}_T + \Gamma^X_{TT}\vec{e}_X) \cdot \vec{e}_T = 2e^{2X}\Gamma^T_{TT} \Longrightarrow \Gamma^T_{TT} = 0$$

$$2e^{2X} = \partial_X(\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T) = 2\partial_X\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T = 2(\Gamma^T_{XT}\vec{e}_T + \Gamma^X_{XT}\vec{e}_X) \cdot \vec{e}_T = 2e^{2X}\Gamma^T_{XT} \Longrightarrow \Gamma^T_{XT} = 1 = \Gamma^T_{TX}$$

Similarmente, usando $\vec{e}_X \cdot \vec{e}_X = -e^{2X}$

$$0 = \partial_T(\vec{e}_X \cdot \vec{e}_X) = 2\partial_T\vec{e}_X \cdot \vec{e}_X = 2(\Gamma^T_{TX}\vec{e}_T + \Gamma^X_{TX}\vec{e}_X) \cdot \vec{e}_X = -2e^{2X}\Gamma^X_{TX} \Longrightarrow \Gamma^X_{TX} = 0 = \Gamma^X_{XT}$$

$$-2e^{2X} = \partial_X(\vec{e}_X \cdot \vec{e}_X) = 2\partial_X\vec{e}_X \cdot \vec{e}_X = 2(\Gamma^T_{XX}\vec{e}_T + \Gamma^X_{XX}\vec{e}_X) \cdot \vec{e}_X = -2e^{2X}\Gamma^X_{XX} \Longrightarrow \Gamma^X_{XX} = 1$$

Y finalmente, usando esta información con $\vec{e}_X \cdot \vec{e}_T = 0$

$$0 = \partial_T(\vec{e}_X \cdot \vec{e}_T) = \partial_T\vec{e}_X \cdot \vec{e}_T + \vec{e}_X \cdot \partial_T\vec{e}_T = \vec{e}_T \cdot \vec{e}_T + \vec{e}_X \cdot (\Gamma^X_{TT}\vec{e}_X) = e^{2X} - e^{2X}\Gamma^X_{TT} \Longrightarrow \Gamma^X_{TT} = 1$$

$$0 = \partial_X(\vec{e}_X \cdot \vec{e}_T) = \partial_X\vec{e}_X \cdot \vec{e}_T + \vec{e}_X \cdot \partial_X\vec{e}_T = (\Gamma^T_{XX}\vec{e}_T + \vec{e}_X) \cdot \vec{e}_T + \vec{e}_X \cdot \vec{e}_T = e^{2X}\Gamma^T_{XX} \Longrightarrow \Gamma^T_{XX} = 0$$

La segunda forma es utilizar que las geodésicas en un espacio curvo tienen la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{1}$$

Y que éstas se obtienen buscando la trayectoria que minimiza el funcional

$$\int g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \int e^{2X}(\dot{T}^2 - \dot{X}^2)\,\mathrm{d}\lambda \tag{2}$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = 2e^{2X}\dot{T} \Longrightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = 0 - 4e^{2X}\dot{X}\dot{T} - 2e^{2X}\ddot{T} = 0 \Longrightarrow \ddot{T} + 2\dot{X}\dot{T} = 0$$

Que, comparando con la ecuación (1) obtenemos directamente $\Gamma^T_{XX} = \Gamma^T_{TT} = 0$ y $\Gamma^T_{XT} = 1$. Haciendo lo mismo para X

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = -2e^{2X}\dot{X} \Longrightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = 2e^{2X}(\dot{T}^2 - \dot{X}^2) + 4e^{2X}\dot{X}^2 + 2e^{2X}\ddot{X} = 0 \Longrightarrow \ddot{X} + \dot{X}^2 + \dot{T}^2 = 0$$

Y, por lo tanto, $\Gamma^X_{XX} = \Gamma^X_{TT} = 1$ y $\Gamma^X_{XT} = 0$. Podemos escribir:

$$\boxed{{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta} = \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)} \tag{3}$$

La tercera forma de demostrarlo es hacerlo usando la definición

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta} \right) \tag{4}$$

en efecto, como nuestra métrica tiene la forma $\tilde{g} = \Omega g$, con Ω una función de las coordenadas y g la métrica de Minkowski, podemos reescribirlo como:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \left(\partial_\alpha \tilde{g}_{\beta\nu} + \partial_\beta \tilde{g}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \Omega^{-1} g^{\mu\nu} \left(\Omega \partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\alpha \Omega g_{\beta\nu} + \Omega \partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\beta \Omega g_{\alpha\nu} - \Omega \partial_\nu g_{\alpha\beta} - \partial_\nu \Omega g_{\alpha\beta} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} \Omega^{-1} g^{\mu\nu} \left(\partial_\alpha \Omega g_{\beta\nu} + \partial_\beta \Omega g_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Omega g_{\alpha\beta} \right) \\
&= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Omega^{-1} \left(\delta^{\mu}_{\beta} \partial_\alpha \Omega + \delta^{\mu}_{\alpha} \partial_\beta \Omega - g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Omega \right) = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\delta^{\mu}_{\beta} \delta^{\nu}_{\alpha} + \delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} - g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right) \partial_\nu (\ln \Omega)
\end{aligned}$$

Ahora, usando lo que sabemos $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$ y $\frac{1}{2}\Omega^{-1}\partial_\lambda \Omega = \partial_\lambda X$ es fácil calcular las conexiones.

2. Demostrar $\partial_t^2 - \partial_x^2 = e^{-2X}(\partial_T^2 - \partial_X^2)$

Fijémonos que $\partial_t^2 - \partial_x^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu$. Las derivadas transforman como

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \partial'_\alpha \tag{5}$$

Por lo que podemos reescribir la expresión como

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \partial'_\alpha \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \partial'_\beta \right) = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \partial'_\beta + \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \right) \partial'_\alpha \partial'_\beta$$

Pero precisamente, la métrica en las nuevas coordenadas se escribe como

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}$$

Por lo que, si ignoramos el primer término de la expresión de la derecha obtenemos

$$\boxed{\partial_t^2 - \partial_x^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = g'^{\alpha\beta} \partial'_\alpha \partial'_\beta = e^{-2X} \left(\partial_T^2 - \partial_X^2 \right)} \tag{6}$$

Vamos a ver qué ocurre con el término que falta, aunque podríamos calcular las segundas derivadas, vamos a aprovechar que ya conocemos las conexiones para reescribir la segunda derivada como

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -g^{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} = -g'^{\lambda\rho} \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho}$$

Como en nuestro caso la métrica es diagonal; $g'^{TX} = 0$, éste término es trivialmente cero para $\beta = T$, puesto que al expandir los 4 términos, todos ellos son cero. Para $\beta = X$ sobreviven dos términos y nos queda

$$g'^{\lambda\rho} \Gamma^{X}_{\lambda\rho} = g'^{TT} \Gamma^{X}_{TT} + g'^{XX} \Gamma^{X}_{XX} = 0$$

dado que $g'^{TT} = -g'^{XX}$ y $\Gamma^{X}_{TT} = \Gamma^{X}_{XX}$. Por lo que podemos, en efecto, ignorar éste término en la ecuación (6), pero notemos que éstas segundas derivadas no son, en general, cero. Por lo que podemos ver que el objecto $\partial_\mu \partial_\nu$ **no transforma como un tensor**.

3. Demostrar $(\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2 = e^{-2X}((\partial_T\phi)^2 - (\partial_X\phi)^2)$

El procedimiento para demostrar esta ecuación es idéntico al anterior, ya que

$$(\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = g^{\mu\nu}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\partial'_\alpha\phi\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\partial'_\beta\phi = \left(g^{\mu\nu}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\right)\partial'_\alpha\phi\partial'_\beta\phi = g'^{\alpha\beta}\partial'_\alpha\phi\partial'_\beta\phi$$
$$= \boxed{e^{-2X}((\partial_T\phi)^2 - (\partial_X\phi)^2)}$$

Notemos que ahora no aparece ningún término extra que se tenga que cancelar como pasaba en el caso anterior, comprobamos pues que $\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ **transforma como un tensor**. Esto lo podemos ver más claro recordando que, para funciones escalares se cumple que $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$, por lo que se cumple que

$$\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$$

mientras que no es cierto que $\partial_\mu\partial_\nu = \nabla_\mu\nabla_\nu$.